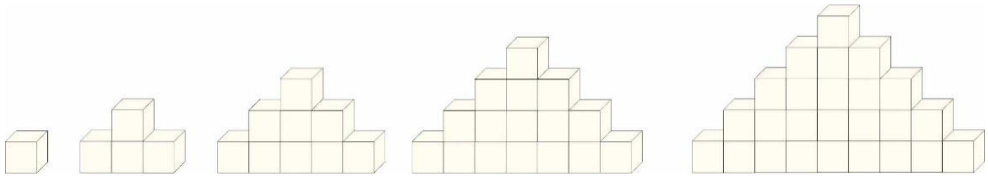
Cukrové posloupnosti 2 – SŠ – řešení

Ve videu si moderátor staví z kostek cukru různé stavby. Podobných staveb si můžeme vytvořit celou řadu a některé z nich si ukážeme a prozkoumáme z pohledu matematiky. Kostku „běžného" cukru budeme znázorňovat žlutou krychličkou, krychlička světle hnědá představuje kostku třtinového cukru.

1) Na obr. 1 je zakresleno prvních pět staveb z kostek cukru, které vznikly podle následujícího pravidla: V první (horní) řadě je jedna kostka. Každá další (nižší) řada má vždy o dvě kostky více než řada předchozí.

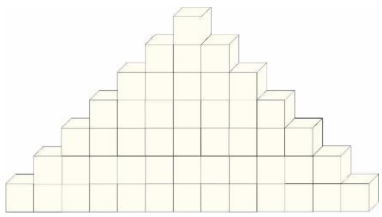


Obr. 1

   a) Určete pro jednotlivé stavby celkový počet použitých kostek cukru p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.
   b) Nakreslete sedmou stavbu a určete počet kostek cukru, z nichž je postavena.
   c) Nalezněte obecný vztah p_n pro celkový počet kostek cukru pro n-tou stavbu.

a) V první stavbě je jedna kostka cukru ($p_1 = 1$), ve druhé stavbě byly použity čtyři kostky ($p_2 = p_1 + 3 = 4$), ve třetí stavbě je 9 kostek ($p_3 = p_2 + 5 = 9$). Analogicky spočítáme, že $p_4 = p_3 + 7 = 16$ a $p_5 = p_4 + 9 = 25$.

b)



$p_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$. Sedmá stavba je postavena ze 49 kostek cukru.

c) Celkový počet kostek v n-té stavbě vypočteme jako

$$p_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

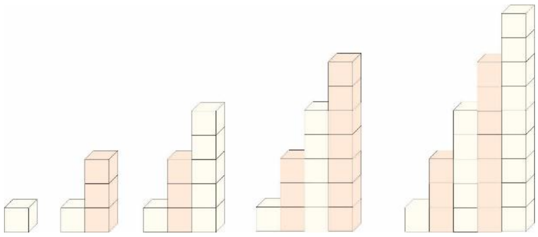
Jedná se o součet po sobě jdoucích lichých přirozených čísel od jedné do $(2n – 1)$.
Z předchozích úvah vidíme, že posloupnost $\boldsymbol{p_n}$ nabývá hodnot

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …,

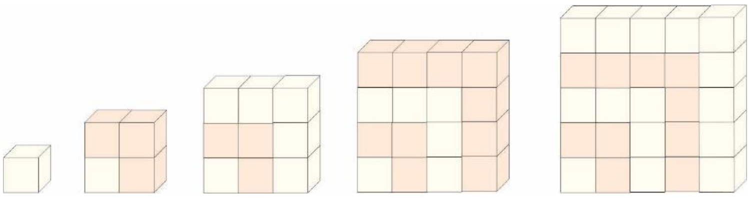
což jsou drohé mocniny přirpzených čísel. To nás vede k domněnce (museli bychom ji ověřit exaktním matematickým důkazem), že

$$p_n = n^2.$$

Ke stejnému závěru dospějeme i „manipulativní činností" s kostkami cukru, jak je znázorněno na následujících obrázcích. Pro lepší názornost postavíme „sudé řady" z kostek hnědého cukru. Stavby na obr. 1 nejpve přeskládáme do tvaru

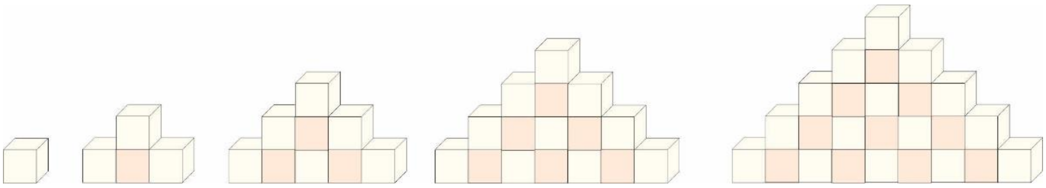


Následně kostky přesuneme „vlevo“ a dosteneme stavby ve tvaru čtverců.



To nás opět vede k závěru, že $\boldsymbol{p_n = n^2}$.

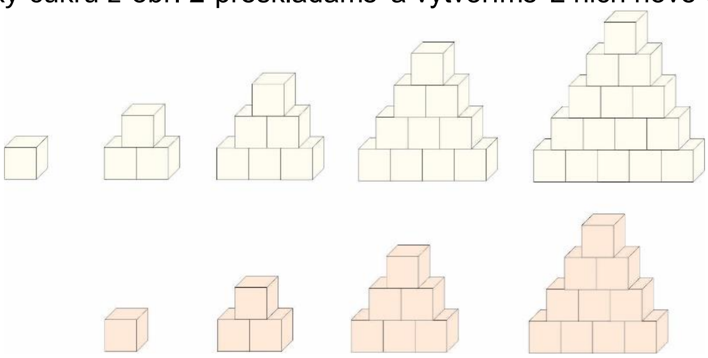
2) Na obr. 2 je zakresleno prvních pět staveb z kostek cukru, které vznikly podle následujícího pravidla: V první řadě je jedna kostka. Každá další řada má vždy o dvě kostky více než řada předchozí, kostky obou druhů cukru se pravidelně střídají.



Obr. 2

a) Určete pro jednotlivé stavby, kolik kostek daného druhu cukru bylo ke stavbě použito.
b) O kolik méně kostek třtinového cukru potřebujeme k postavení *n*-té stavby?
c) Pro každý druh cukru určete, kolik kostek budeme potřebovat k vytvoření *n*-té stavby.

a) Nejprve si kostky cukru z obr. 2 přeskládáme a vytvoříme z nich nové stavby.



Počty kostek použité pro dané stavby jsou:

bílý cukr: 1, 3, 6, 10, 15
třtinový cukr: 0, 1, 3, 6, 10

b) Uvědomíme si, že v každém řádku stavby je o jednu třtinového cukru méně. Protože je n-tá stavba složena z n řad, je v ní o n kostek třtinového cukru méně.

c) Z úlohy 1 víme, že k vytvoření n-té stavby potřebujeme celkem n^2 kostek. Z úlohy 2b plyne, že v n-té stavbě je o n kostek třtinového cukru méně než cukru bílého. Odtud již snadno určíme hledaný počet kostek daného druhu pro n-tou stavbu:

bílý cukr: $p_n = \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$

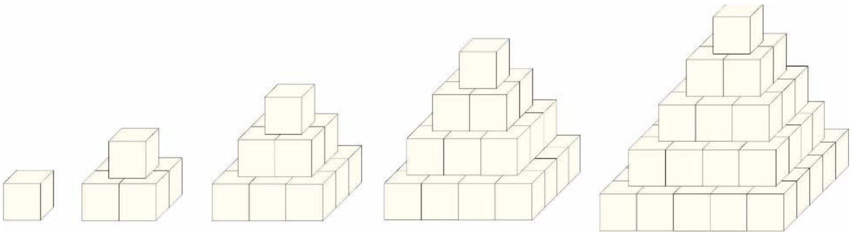
třtinový cukr: $p_n = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

3) Z kostek cukru můžeme stavět i složitější (prostorové) útvary. Stavby na obr. 3. vznikly podle následujícího pravidla: V první vrstvě je jedna kostka. Každá další vrstva je čtverec z kostek. Strana čtverce má vždy o jednu kostku více než měl předchozí čtverec.

a) Určete pro jednotlivé stavby na obr. 3, kolik kostek cukru bylo ke stavbě použito.

b) Určete počet kostek cukru, z nichž je postavena sedmá stavba.

c) Nalezněte obecný vztah p_n pro celkový počet kostek cukru pro n-tou stavbu.



Obr. 3

a) V první stavbě je jedna kostka cukru ($p_1 = 1$), ve druhé stavbě bylo použito pět kostek ($p_2 = p_1 + 4 = 5$), ve třetí stavbě je 14 kostek ($p_3 = p_2 + 9 = 14$). Analogicky spočítáme, že $p_4 = p_3 + 16 = 30$ a $p_5 = p_4 + 25 = 55$.

b) Podobně jako v předešlém případě vypočítáme, že $p_6 = p_5 + 36 = 91$ a $p_7 = p_6 + 49 = 140$.

c) Z předešlých úvah plyne, že

$$p_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2,$$

což lze upravit na tvar

$$p_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$