

# Pythagorejci a čísla

1. Vlastním dělitelem přirozeného čísla  $n$  nazýváme každé přirozené číslo  $k < n$ , které dělí číslo  $n$ . Například číslo 12 má vlastní dělitele 1, 2, 3, 4 a 6. Součet těchto dělitelů je 16, tedy více než 12. Někdy však je součet vlastních dělitelů přirozeného čísla menší než toto číslo. Například číslo 15 má vlastní dělitele 1, 3 a 5, jejichž součet je 9. Zcela výjimečně se však stane, že součet vlastních dělitelů přirozeného čísla je roven tomuto číslu. Taková čísla pythagorejci nazvali dokonalá. Mezi prvními padesáti přirozenými čísly jsou právě dvě dokonalá čísla. Najdete je?

Nejmenší dvě dokonalá čísla jsou 6 a 28.

Platí:  $6 = 1 + 2 + 3$

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

Dodnes je znám jen konečný počet dokonalých čísel.

2. Mystické vlastnosti pythagorejci připisovali tzv. spřáteleným číslům. To jsou taková přirozená čísla  $p$  a  $q$ , že součet vlastních dělitelů každého z nich je roven druhému z těchto čísel. Nalezení takových dvojic není snadné. Pythagorejci sice některá spřátelená čísla znali, první pravidlo pro jejich nalezení však popsal v 9. století arabský učenec Thabit ibn Qurra. Jeho pravidlo je následující:

Když jsou pro některé přirozené číslo  $n > 1$  čísla

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,$$

$$q = 3 \cdot 2^n - 1,$$

$$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1,$$

prvočísla, pak jsou čísla  $2^n \cdot p \cdot q$  a  $2^n \cdot r$  spřátelená.

Najdete podle tohoto pravidla nějakou dvojici spřátelených čísel?

Pro  $n = 2$  dostáváme hodnoty  $p = 5$ ,  $q = 11$  a  $r = 71$ . Odtud  $2^n \cdot p \cdot q = 220$  a  $2^n \cdot r = 284$ .

Čísla 220 a 284 jsou spřátelená, neboť  $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$ , takže má vlastní dělitele 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, jejichž součet je 284. Vlastní dělitelé čísla 284 jsou 1, 2, 4, 71 a 142, neboť  $284 = 2 \cdot 2 \cdot 71$ . Součet těchto dělitelů je 220.

Z Thabitových vzorců ještě dostaneme pro  $n = 4$  spřátelená čísla 17 296 a 18 416 a pro  $n = 7$  spřátelená čísla 9 363 584 a 9 437 056. Žádná další spřátelená čísla odvozená z Thabitových vzorců nejsou známa. Existuje však mnoho jiných pravidel pro vyhledávání spřátelených čísel.



Autoři: Eduard Fuchs, Pavel Tlustý, Eva Zelendová

Toto dílo je licencováno pod licencí Creative Commons [CC BY-NC 4.0]. Licenční podmínky navštivte na adrese [https://creativecommons.org/choose/?lang=cs].